

Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion

Eine Einführung in die mathematische
Modellbildung für Lehramtsstudierende

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	VII
1	Was heißt: „Mathematik anwenden“?	1
1.1	Was ist Modellbilden?	4
1.2	Modellieren funktionaler Abhängigkeiten	17
1.3	Überblick über die folgenden Kapitel	18
1.4	Rolle von realen Daten	20
1.5	Rolle von Software und Multimedia	23
2	Standardmodelle und Naturgesetz	29
2.1	Einleitung	31
2.2	Einige Standardmodelle im Überblick	39
2.3	Spezielle Eigenschaften einiger Standardmodelle	44
2.3.1	Proportionalität und lineare Funktionen	44
2.3.2	Antiproportionalität	49
2.3.3	Polynome und Potenzfunktionen	58
2.3.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen	69
2.3.5	Winkelfunktionen	77
2.4	Techniken zum Modellieren mit Funktionen	88
2.4.1	Operationen mit Funktionen	89
2.4.2	Logistische Funktionen	91
2.4.3	Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus	95
2.4.4	Verketteten von Funktionen	97
2.4.5	Transformation der Achsen	99
2.4.6	Ockhams Rasiermesser, Platons Bart und die Warnung vor zu viel Komplexität	104
3	Lass die Daten sprechen	109
3.1	Einleitung	111
3.2	Lineare Interpolation	112
3.3	Interpolation durch Polynome	113
3.3.1	Lagrange-Polynome	118
3.3.2	Newton-Polynome	121
3.3.3	Maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung des Sprinters	125
3.3.4	Interpolationsfehler	127
3.4	Splines	132
3.4.1	Minimaleigenschaft	136
3.4.2	Konvergenzverhalten von Splines	138

4	Die Grenzen des Wachstums	143
4.1	Einleitung	145
4.2	Diskrete Modellierung von Wachstumsprozessen	146
4.2.1	Lineares Wachstum	147
4.2.2	Quadratisches Wachstum	148
4.2.3	Freies oder exponentielles Wachstum	150
4.2.4	Graphische Iterationen und Spinnwebdiagramme	151
4.2.5	Begrenztes Wachstum	152
4.2.6	Logistisches Wachstum	154
4.2.7	Zeitverzögertes Wachstum: Ein Beispiel	157
4.2.8	Ein Mordfall	161
4.3	Logistische Differenzengleichung und Chaos	167
4.3.1	Exkurs: Mathematische Analyse der logistischen Differenzengleichung	170
4.3.2	Zusammenfassung	173
4.4	Diskrete Modellierungen gekoppelter Populationen	175
4.4.1	Masernepidemien	175
4.4.2	Populationen in Wechselwirkung	179
4.5	Stetige Modellierungen von Wachstumsprozessen	187
4.5.1	Exkurs Lösen von Differenzialgleichungen	191
4.5.2	Logistisches Wachstum	196
4.5.3	Weitere Wachstumsformen	201
4.6	Stetige Modellierung gekoppelter Systeme	207
4.6.1	Epidemien	207
4.6.2	Population in Wechselwirkung: Stetige Version	209
4.6.3	Der Kampf ums Dasein: Räuber-Beute-Modelle	211
5	Verrauschte Signale und funktionale Modelle	219
5.1	Einleitung	221
5.2	Prinzip der kleinsten Quadrate: Regressionsgerade	227
5.3	Eigenschaften der Regressionsgeraden	234
5.4	Korrelation	244
5.5	Varianzanalyse	249
5.6	Regression und Lineare Algebra	256
5.7	Nichtlineare Zusammenhänge: Der Transformationsansatz	262
5.8	Funktionsanpassung logistischer Modelle	273
5.9	Grundzüge der nichtlinearen Regression	277
5.9.1	Spezialfall: Lineare Regression	279
5.9.2	Der allgemeine Fall	280
5.9.3	Der Gauß-Newton-Algorithmus	282

5.9.4	Zur Konvergenz des Gauß-Newton-Algorithmus	285
5.9.5	Der Gauß-Newton-Algorithmus für einparametrische Funktionen	286
5.10	Zusammenfassung: Parametrische Kurvenanpassung ...	297
6	Durch Glätten der Daten zur Funktion	305
6.1	Einleitung	307
6.2	Bivariate Verteilungen, gleitende Boxplots und Regressogramm	308
6.3	Gleitende Mittelwerte.....	314
6.4	Zeitreihen	317
6.5	Von der gleitenden Mittelwertkurve zum Kernschätzer ..	322
7	Nichtparametrische Methoden zum Kurvenschätzen	333
7.1	Einleitung	335
7.2	Kernschätzer unter festem Design	337
7.2.1	Faltungsschätzer: Definition und Beispiele	337
7.2.2	Mathematische Eigenschaften: Bias, Varianz	342
7.2.3	Wahl der Kernfunktion K	347
7.2.4	Wahl der Bandbreite.....	351
7.2.5	Randverhalten.....	355
7.3	Kernschätzer unter zufälligem Design	360
7.4	Lokal-lineare Approximation.....	363
7.5	Lokal-polynomiale Anpassung.....	368
7.6	Ergänzungen und Vertiefungen	371
7.6.1	Zur Asymptotik des lokal-polynomialen Schätzers.....	371
7.6.2	Schätzen von Ableitungen	375
7.6.3	Glätten ohne parametrischen Bezug	377
7.6.4	Glätten mit Splines	379
7.6.5	Komplexere Modelle	381
7.7	Zusammenfassung.....	385
A	Beschreibung der Datensätze	389
B	Anmerkungen zur Software	419
B.1	FATHOM.....	421
B.2	EXCEL.....	436
B.3	R	437

C	Lösungen zu ausgewählten Aufgaben	441
	Literatur	459
	Sachverzeichnis	465