

# Inhalt

<b>1. Zahlbereiche und Funktionsbegriff</b> .....	11
1.1. Die reellen Zahlen .....	11
1.1.1. Die rationalen Zahlen .....	11
1.1.2. Dezimalzahlen .....	13
1.1.3. Rechnen mit reellen Zahlen .....	13
1.2. Die komplexen Zahlen .....	14
1.2.1. Definition und Darstellung der komplexen Zahlen .....	14
1.2.2. Das Rechnen mit komplexen Zahlen .....	16
1.2.3. Beträge und Ungleichungen .....	18
1.2.4. Tragweite der komplexen Zahlen .....	20
1.3. Funktionsbegriff; einfachste Klassen von Funktionen .....	22
1.3.1. Beispiele .....	22
1.3.2. Präzisierung des Funktionsbegriffs .....	25
1.3.3. Die einfachsten rationalen Funktionen .....	28
1.3.4. Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ .....	32
<b>2. Differential- und Integralrechnung</b> .....	37
2.1. Zahlenfolgen und unendliche Reihen .....	37
2.1.1. Definitionen und Beispiele, Rechnen mit Zahlenfolgen .....	37
2.1.2. Konvergenzkriterium von Cauchy, monotone Folgen .....	41
2.1.3. Unendliche Reihen .....	43
2.1.4. Hinreichende Kriterien für absolute Konvergenz (Vergleichskriterien) .....	46
2.2. Differenzierbarkeit und Stetigkeit von Funktionen .....	50
2.2.1. Grenzwerte von Funktionen .....	50
2.2.2. Die Ableitung einer Funktion .....	52
2.2.3. Stetigkeit als Folge der Differenzierbarkeit; Eigenschaften stetiger Funktionen .....	54
2.2.4. Ableitungsregeln: Ableitung der Polynome und der rationalen Funktionen .....	56
2.2.5. Die Kettenregel und die Ableitung der Umkehrfunktion .....	58
2.2.6. Die Ableitung der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus .....	61
2.2.7. Ableitung der Funktionen $\sin$ und $\cos$ . Eulersche Formel .....	64
2.3. Integralrechnung für Funktionen einer Variablen .....	68
2.3.1. Hinführung zum Begriff des bestimmten Integrals .....	68
2.3.2. Das bestimmte Integral monotoner und stetiger Funktionen .....	71
2.3.3. Wichtige Eigenschaften des bestimmten Integrals .....	73
2.3.4. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; Stammfunktionen .....	74
2.3.5. Beispiele zur Berechnung bestimmter Integrale. Uneigentliche Integrale .....	77
2.3.6. Partielle Integration, Substitutionsregel und Beispiele dazu .....	81
2.3.7. Näherungsverfahren zur Berechnung bestimmter Integrale .....	88

2.4. Taylorentwicklung von Funktionen; Anwendungen .....	94
2.4.1. Die Formel von Taylor .....	94
2.4.2. Taylorreihen und Potenzreihen .....	100
2.4.3. Rechnen mit Potenzreihen. Grenzwertbestimmung durch Potenzreihenentwicklung .....	105
2.4.4. Monotonie, Maxima und Minima von Funktionen .....	109
2.4.5. Das Newtonsche Näherungsverfahren zur Auflösung von Gleichungen .....	114
<b>3. Die elementaren Funktionen. Fourierreihen .....</b>	<b>120</b>
3.1. Polynome und rationale Funktionen .....	121
3.1.1. Eigenschaften der Polynome .....	121
3.1.2. Das Horner Schema .....	123
3.1.3. Interpolation durch Polynome .....	125
3.1.4. Rationale Funktionen und ihre Teilbruchzerlegung .....	126
3.2. Allgemeine Potenz- und Exponentialfunktion .....	131
3.2.1. Die allgemeine Potenzfunktion .....	131
3.2.2. Die Binomialreihe .....	134
3.2.3. Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion; Zehnerlogarithmus .....	136
3.2.4. Darstellung der Potenz- und Exponentialfunktionen auf logarithmischen Papieren; Anwendungsbeispiele .....	138
3.3. Trigonometrische Funktionen und Arcusfunktionen; Hyperbelfunktionen und Areafunktionen .....	142
3.3.1. tangens und cotangens .....	142
3.3.2. Die Arcusfunktionen .....	144
3.3.3. Die Hyperbelfunktionen .....	146
3.3.4. Die Areafunktionen .....	149
3.3.5. Auswertung von Integralen mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen, der Hyperbelfunktionen und deren Umkehrfunktionen .....	150
3.4. Periodische Funktionen und Fourierreihen .....	156
3.4.1. Periodische Funktionen .....	156
3.4.2. Approximation periodischer Funktionen durch trigonometrische Polynome .....	157
3.4.3. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Fourierreihen: weitere Eigenschaften von Fourierreihen .....	160
3.4.4. Beispiele von Fourierentwicklungen .....	162
<b>4. Analytische Geometrie und lineare Algebra .....</b>	<b>170</b>
4.1. Vektorrechnung .....	170
4.1.1. Darstellung von Punkten der Ebene und des Raumes durch Zahlenpaare bzw. Zahlentripel .....	170
4.1.2. Vektoren im Raum .....	171
4.1.3. Addition und Subtraktion von Vektoren; Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl .....	173

4.1.4. Das Skalarprodukt (innere Produkt) zweier Vektoren . . . . .	176
4.1.5. Das Vektorprodukt (äußere Produkt) . . . . .	178
4.1.6. Vektorrechnung in einem kartesischen Koordinatensystem . . . . .	181
4.2. Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	187
4.2.1. Abbildungen von Punkt Mengen . . . . .	187
4.2.2. Lineare Abbildungen . . . . .	189
4.2.3. Beschreibung linearer homogener Abbildungen durch Matrizen . . . . .	191
4.2.4. Rechnen mit Matrizen . . . . .	193
4.3. Lineare Gleichungssysteme und Determinanten . . . . .	199
4.3.1. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten; zweireihige Determinanten . . . . .	199
4.3.2. Drei Gleichungen mit drei Unbekannten; dreireihige Determinanten . . . . .	202
4.3.3. $n$ -reihige Determinanten . . . . .	205
4.3.4. $n$ lineare Gleichungen mit $n$ Unbekannten . . . . .	210
4.4. Symmetriegruppen von Molekülen . . . . .	215
4.4.1. Einfache Beispiele zum Gruppenbegriff . . . . .	215
4.4.2. Untergruppen; zyklische Gruppen . . . . .	219
4.4.3. Die orthogonale Gruppe; Symmetriegruppen . . . . .	222
4.4.4. Beispiele von Symmetriegruppen . . . . .	225
<b>5. Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .</b>	<b>230</b>
5.1. Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	230
5.1.1. Beispiele von Funktionen mehrerer Veränderlicher; Stetigkeitsbegriff . . . . .	230
5.1.2. Partielle Ableitungen . . . . .	232
5.1.3. Die Kettenregel für partielle Differentiation . . . . .	235
5.1.4. Mittelwertsatz und Taylorformel; Approximation durch lineare und quadratische Funktionen . . . . .	238
5.1.5. Fehlerrechnung . . . . .	241
5.1.6. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	244
5.1.7. Ausgleichen von Meßfehlern; Regressionsgerade . . . . .	247
5.2. Einiges aus der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	254
5.2.1. Differentialformen und Kurvenintegrale . . . . .	254
5.2.2. Differentialformen in der Thermodynamik . . . . .	259
5.2.3. Kurvenintegrale von Kraftfeldern; Arbeit, Potential, Gradient, Rotation . . . . .	262
5.2.4. Beispiele von Bereichsintegralen . . . . .	265
<b>6. Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>271</b>
6.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen I. Ordnung . . . . .	271
6.1.1. Beispiele und geometrische Deutung . . . . .	271
6.1.2. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen . . . . .	273
6.1.3. Lineare Differentialgleichungen . . . . .	277

6.1.4. Exakte Differentialgleichungen; integrierender Faktor .....	279
6.1.5. Beispiele zum Aufstellen von Differentialgleichungen .....	283
6.2. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung .....	288
6.2.1. Beispiele; allgemeine Aussagen .....	288
6.2.2. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	289
6.2.3. Anwendung auf mechanische und elektrische Schwingungen .....	291
<b>7. Wahrscheinlichkeitsrechnung .....</b>	<b>295</b>
7.1. Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	295
7.1.1. Hinführung zum Begriff „Wahrscheinlichkeit“ .....	295
7.1.2. Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume und -verteilungen .....	296
7.1.3. Laplace-Verteilung oder Gleichverteilung .....	297
7.1.4. Die Binomialverteilung .....	298
7.1.5. Die Poisson-Verteilung .....	299
7.1.6. Zusammenhang zwischen Binomialverteilung und Poisson-Verteilung .....	299
7.1.7. Typische Anwendungssituationen der Poisson-Verteilung .....	300
7.2. Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	302
7.2.1. Radioaktiver Zerfall als Zufallsexperiment .....	302
7.2.2. Allgemeine Definition einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	303
7.2.3. Die Normalverteilung .....	303
7.2.4. Die Chi-Quadrat-Verteilung .....	305
7.2.5. Die $t$ -Verteilung .....	306
7.2.6. Die $F$ -Verteilung .....	307
7.3. Zufallsgrößen; Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz .....	309
7.3.1. Diskrete Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktion .....	309
7.3.2. Stetige Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktion .....	312
7.3.3. Erwartungswert einer Zufallsgröße .....	313
7.3.4. Funktionen von Zufallsgrößen und ihr Erwartungswert .....	315
7.3.5. Varianz einer Zufallsgröße .....	316
7.3.6. Beispiele zur Berechnung von $E(X)$ und $V(X)$ .....	317
7.4. Zufallsvektoren, Unabhängigkeit .....	322
7.4.1. Mehrdimensionale Zufallsgrößen (Zufallsvektoren) .....	322
7.4.2. Verteilung(sfunktion) eines Zufallsvektors, Randverteilungen, Unabhängigkeit von Zufallsgrößen .....	323
7.4.3. Funktionen von Zufallsvektoren, ihr Erwartungswert und ihre Varianz .....	326
7.4.4. Beispiel .....	328
<b>8. Statistik .....</b>	<b>331</b>
8.1. Zufallsstichproben .....	331
8.1.1. Stichproben aus Grundgesamtheiten .....	331
8.1.2. Unabhängige Zufallsstichproben .....	332

8.2. Schätzen von Parametern .....	333
8.2.1. Mittelwert und (empirische) Varianz einer Stichprobe .....	333
8.2.2. Erwartungstreue Schätzfunktionen für $E(X)$ und $V(X)$ .....	334
8.2.3. Konfidenzintervalle für Schätzwerte von Parametern .....	335
8.2.4. Konfidenzintervalle für $E(X)$ , wenn $X$ normalverteilt und $V(X)$ bekannt ist	336
8.2.5. Konfidenzintervalle für $E(X)$ , wenn $X$ normalverteilt und $V(X)$ unbekannt ist .....	338
8.2.6. Konfidenzintervalle für eine Trefferwahrscheinlichkeit (bei großem Stich- probenumfang) .....	339
8.2.7. Bemerkung über die Brauchbarkeit der Normalverteilung .....	341
8.3. Testen von Parametern .....	342
8.3.1. Vorläufige und exemplarische Formulierung des Problems .....	342
8.3.2. Das allgemeine Modell für das Testen eines Parameters .....	343
8.3.3. Test für $\vartheta = E(X)$ , wenn $X$ normalverteilt und $V(X) = \sigma^2$ bekannt ist ..	345
8.3.4. Zweiseitiger Test für $\vartheta = E(X)$ , wenn $X$ normalverteilt und $V(X)$ unbekannt ist ( $t$ -Test) .....	347
8.3.5. Test für die Varianz einer normalverteilten Zufallsgröße .....	347
8.4. Weitere Testprobleme .....	350
8.4.1. Vergleich der Erwartungswerte zweier unabhängiger Normalverteilungen mit gleicher Varianz .....	350
8.4.2. Vergleich der Varianzen zweier unabhängiger Normalverteilungen ( $F$ -Test)	351
8.4.3. Testen einer Verteilungsfunktion: der Chi-Quadrat-Test .....	352
8.4.4. Unabhängigkeitstests .....	353
<b>Anhang: Lösungen der mit * versehenen Übungsaufgaben .....</b>	<b>355</b>
<b>Symbolverzeichnis .....</b>	<b>368</b>
<b>Literatur .....</b>	<b>369</b>
<b>Sachverzeichnis .....</b>	<b>370</b>