

Inhalt

1. Lineare Räume	1
1.1 Die Struktur linearer Räume	1
1.1.1 Das externe Verknüpfungsgesetz	1
1.1.2 Definition des linearen Raumes	1
1.1.3 Einfachste Eigenschaften	2
1.1.4 Das Produkt linearer Räume	3
1.2 Lineare Teilräume	5
1.2.1 Definition des linearen Teilraumes	5
1.2.2 Einfachste Eigenschaften	6
1.2.3 Die lineare Hülle	7
1.3 Lineare Abhängigkeit	8
1.3.1 Lineare Abhängigkeit eines Vektorsystems	8
1.3.2 Die Basis eines linearen Raumes	10
1.3.3 Die Dimension eines linearen Raumes	12
1.3.4 Der lineare Farbenraum	15
1.3.5 Lineare Räume der atomaren und molekularen Komponenten	16
1.3.6 Äquivalente Vektorsysteme	21
1.4 Isomorphismus linearer Räume	22
1.5 Die Summe linearer Teilräume	24
1.5.1 Die Dimension der Summe und des Durchschnitts	24
1.5.2 Die direkte Summe linearer Teilräume	25
1.5.3 Der komplementäre Teilraum	27
1.5.4 Der Faktorraum	28
1.6 Lineare affine Mannigfaltigkeiten	31
1.6.1 Parallele lineare affine Mannigfaltigkeiten	31
1.6.2 Die affine Hülle	32
1.6.3 Affine Abhängigkeit	34
1.7 Basiswechsel	35
1.7.1 Übergangsformeln	35
1.7.2 Die Orientierung eines reellen Raumes	37
2. Euklidische und unitäre Räume	39
2.1 Euklidische Räume	39
2.1.1 Definition und einfachste Eigenschaften	39
2.1.2 Länge und Winkel	40

2.1.3	Orthogonale Vektoren	41
2.1.4	Die Gramsche Matrix	44
2.1.5	Isometrische euklidische Räume	47
2.1.6	Das orthogonale Komplement	47
2.1.7	Der Abstand zwischen Mengen	50
2.2	Unitäre Räume	53
3.	Lineare Abbildungen	57
3.1	Grundbegriffe	57
3.1.1	Definition einer linearen Abbildung	57
3.1.2	Das Bild einer linearen Abbildung	58
3.1.3	Der Kern einer linearen Abbildung	60
3.1.4	Der Satz über Rang und Defekt einer linearen Abbildung	60
3.2	Operationen zwischen linearen Abbildungen	62
3.2.1	Der lineare Raum der linearen Abbildungen	62
3.2.2	Der Ring der linearen Operatoren	64
3.2.3	Der Rang des Produkts linearer Abbildungen	66
3.3	Lineare Abbildungen und Matrizen	68
3.3.1	Die Matrix einer linearen Abbildung	68
3.3.2	Die Dimension des Raumes der linearen Abbildungen	70
3.3.3	Transformation der Matrix einer linearen Abbildung beim Übergang zu neuen Basen	73
3.3.4	Äquivalente Matrizen	74
3.3.5	Ein kanonisches Basispaar	76
3.3.6	Die Matrix eines linearen Operators	78
3.4	Invariante Teilräume	79
3.4.1	Definition und Beispiele	79
3.4.2	Eigenvektoren und Eigenwerte	80
3.4.3	Das charakteristische Polynom	82
3.4.4	Verfahren zur Konstruktion eines Eigenvektors	83
3.4.5	Der Eigenraum	84
3.4.6	Invariante Teilräume minimaler Dimension im komplexen und reellen Raum	86
3.5	Die kanonische Form der Matrix eines linearen Operators	88
3.5.1.	Das Operatorpolynom	88
3.5.2	Der Satz von Hamilton und Cayley	90
3.5.3	Aufspaltung des linearen Operators	91
3.5.4	Dreiecksform der Matrix eines linearen Operators im komplexen Raum	94
3.5.5	Der nilpotente Operator	96
3.5.6	Die Jordansche Normalform der Matrix eines linearen Operators	101

4. Bilinear- und quadratische Formen	103
4.1 Die Bilinearform	103
4.2 Quadratische Formen	107
4.3 Reduktion der quadratischen Form auf eine Summe von Quadraten	108
4.3.1 Die Lagrange-Methode	108
4.3.2 Das Jacobi-Verfahren	111
4.4 Quadratische Formen im reellen Raum	113
4.4.1 Definite quadratische Formen	113
4.4.2 Das Trägheitsgesetz	116
4.5 Semibilineare und hermitesche Formen	119
4.5.1 Semibilinearformen	119
4.5.2 Hermitesche Formen	120
 5. Lineare Abbildungen unitärer Räume	 125
5.1 Die Konjugation	125
5.1.1 Die konjugierte Abbildung	125
5.1.2 Eigenschaften einer Konjugationsabbildung	126
5.1.3 Matrizen zueinander konjugierter Abbildungen	129
5.1.4 Kerne und Bilder zueinander konjugierter Abbildungen	130
5.1.5 Der Normaloperator	130
5.1.6 Der unitäre Operator	133
5.1.7 Der hermitesche Operator	136
5.1.8 Der positive Operator	138
5.1.9 Die Wurzel eines Operators	138
5.1.10 Ein singuläres Basispaar	140
5.2 Zerlegungen eines linearen Operators	142
5.2.1 Die hermitesche Zerlegung	142
5.2.2 Die polare Zerlegung	143
5.3 Lineare Abbildungen im euklidischen Raum	144
5.3.1 Konjugationsabbildungen im euklidischen Raum	144
5.3.2 Der symmetrische Operator	145
5.3.3 Die orthogonale Transformation	147
5.3.4 Die einfachste Form der Matrix einer orthogonalen Transformation	149
5.3.5 Die Zerlegung eines linearen Operators im euklidischen Raum	153
5.4 Quadratische Formen im euklidischen Raum	154
5.4.1 Die Bilinearform im euklidischen Raum	154
5.4.2 Die Hauptachsentransformation einer quadratischen Form	155

5.5	Hyperflächen zweiten Grades im euklidischen Punktraum . . .	157
5.5.1	Punkträume	157
5.5.2	Reduzierte Gleichungen der Hyperflächen zweiten Grades	159
5.5.3	Klassifizierung der Hyperflächen zweiten Grades im euklidischen Punktraum	163
6.	Normierte Räume	166
6.1	Die Vektornorm	166
6.1.1	Definition und Beispiele	166
6.1.2	Kugel und Kugelﬂäche im endlichdimensionalen normierten Raum	167
6.1.3	Äquivalente Normen	169
6.2	Die Norm einer linearen Abbildung	172
6.2.1	Übereinstimmende und untergeordnete Normen	172
6.2.2	Die Spektralnrm	174
6.2.3	Die euklidische Matrizenorm	175
6.2.4	Extremaleigenschaften der Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators	177
6.3	Lineare Operatorgleichungen im unitären Raum	179
6.3.1	Bedingungen für die Lösbarkeit linearer Gleichungen	179
6.3.2	Die normale Lösung	180
6.3.3	Die Pseudolösung und die normale Pseudolösung	182
6.3.4	Die Quasilösung	184
6.4	Regularisierungsverfahren bei der Suche nach einer Normallösung	186
6.4.1	Korrekt und nicht korrekt gestellte Aufgaben	186
6.4.2	Das glättende Funktional	187
6.4.3	Der Satz von Tychonow	189
7.	Konvexe Mengen	193
7.1	Definition und einfachste Eigenschaften	193
7.2	Operationen über konvexen Mengen	196
7.3	Die konvexe Hülle einer Menge	200
7.4	Drei Sätze über konvexe Mengen	204
7.5	Konvexe Vielfache	211
7.6	Konvexe Kegel	216
7.6.1	Definition und Beispiele	216
7.6.2	Die Kegelhülle einer Menge	218
7.6.3	Der mehrﬂächige Kegel	219
7.7	Konvexe Mengen in Punkträumen	224
7.8	Die Symmetrisierung	226

8. Elemente der Tensoralgebra	232
8.1 Der Tensorbegriff	232
8.1.1 Beispiele	232
8.1.2 Definition eines Tensors	233
8.1.3 Algebraische Tensoroperationen	237
8.1.4 Beispiele für Tensoren aus Physik und Mechanik	242
8.2 Der metrische Tensor	244
8.2.1 Die metrische Struktur eines Raumes	244
8.2.2 Operationen zum Herunter- und Heraufziehen von Indizes	245
8.2.3 Die pseudo-euklidische Metrik	247
8.2.4 Die Lorentz-Transformation	248
 Anhang	 251
Mathematische Hilfsmittel, auf die in einzelnen Kapiteln Bezug genommen wird	251
Matrizen, Determinanten, lineare Systeme	251
Äquivalenz, Abbildungen	264
Gruppen, Ringe, Körper	268
Polynome	279
Weiterführende Hilfsmittel zum Studium konvexer Mengen, topologischer Strukturen, von Differentialeigenschaften und Ungleichungen	287
Einleitung	287
A. Elemente der Topologie	288
1. Die Topologie eines euklidischen Punktraumes	289
2. Der topologische Raum	291
3. Der Teilraum	294
4. Die stetige Abbildung	295
5. Das topologische Produkt	300
6. Konnexität	302
7. Wegeweiser Zusammenhang	305
8. Kompaktheit	306
B. Konvexe Mengen	309
1. Einfachste konvexe Mengen	309
2. Rand und Inneres einer konvexen Menge	310
3. Sternförmigkeit einer konvexen Menge	312
4. Sternförmigkeit und der Satz von Helly	313
5. Die konvexe Hülle einer kompakten Menge	316
6. Konvexe Körper	317
7. Die Dimension einer konvexen Menge	319

8. Stützebenen	319
9. Der konvexe Kegel und die sphärische Konvexität	324
10. Zwei Verfahren zur Vorgabe konvexer Körper	326
C. Topologische Struktur	328
1. Aufgabenstellung I	328
2. Limeskegel	329
3. Klassifikation abgeschlossener und offener konvexer Mengen	332
4. Lösung der Aufgabe I	336
D. Differentialeigenschaften	337
1. Aufgabenstellung II	337
2. Die konvexe Hyperfläche	337
3. Eine lokale Aufgabe	338
4. Eigenschaften einer konvexen Hyperfläche	339
5. Konvexe Formen	341
6. Eine Menge vom Maß Null	343
7. Glattheit	346
8. Lösung der Aufgabe II	347
E. Einige klassische Ungleichungen	348
1. Der Jungsche Radius	348
2. Das Volumen eines konvexen Körpers	350
3. Die Brunn-Minkowskische Ungleichung	354
4. Die Bieberbachsche Ungleichung	359
5. Extremale Ellipsoide	360
Übungen	365
Sachverzeichnis	383