
Inhaltsverzeichnis

1	Der Stuhl der Braut	1
1.1	Der Satz des Pythagoras – Euklids und andere Beweise	2
1.2	Die Vecten-Figur	4
1.3	Der Kosinussatz	7
1.4	Der Satz von Grebe und die Erweiterung von van Lamoen	7
1.5	Pythagoras und Vecten in der Unterhaltungsmathematik	9
1.6	Aufgaben	11
2	Das Zhoubi suanjing	15
2.1	Der Satz des Pythagoras – ein Beweis aus dem alten China	16
2.2	Zwei klassische Ungleichungen	17
2.3	Zwei trigonometrische Gleichungen	18
2.4	Aufgaben	19
3	Das Trapez von Garfield	21
3.1	Der Satz des Pythagoras – der Präsidenten-Beweis	22
3.2	Ungleichungen und das Trapez von Garfield	22
3.3	Trigonometrische Beziehungen und Identitäten	23
3.4	Aufgaben	26
4	Der Halbkreis	29
4.1	Der Satz des Thales	30
4.2	Der Höhensatz von Euklid und der geometrische Mittelwert	31
4.3	Der Halbkreis von Königin Dido	32
4.4	Die Halbkreise des Archimedes	34
4.5	Pappos und der harmonische Mittelwert	37
4.6	Weitere Identitäten für Winkelfunktionen	38
4.7	Flächen und Umfänge regulärer Vielecke	39
4.8	Euklids Konstruktion der fünf platonischen Körper	40
4.9	Aufgaben	41

5	Ähnliche Figuren	43
5.1	Der Strahlensatz von Thales	44
5.2	Der Satz des Menelaos	50
5.3	Reptiles	51
5.4	Homothetische Funktionen	54
5.5	Aufgaben	56
6	Transversale des Dreiecks	59
6.1	Die Sätze von Ceva und Stewart	61
6.2	Seitenhalbierende und der Schwerpunkt	63
6.3	Höhen und der Höhenschnittpunkt	64
6.4	Winkelhalbierende und der Inkreismittelpunkt	66
6.5	Der Umkreis und sein Mittelpunkt	68
6.6	Transversale ohne gemeinsamen Schnittpunkt	69
6.7	Der Satz von Ceva für Kreise	70
6.8	Aufgaben	71
7	Das rechtwinklige Dreieck	75
7.1	Rechtwinklige Dreiecke und Ungleichungen	76
7.2	Inkreis, Umkreis und Ankreise	77
7.3	Transversale in rechtwinkligen Dreiecken	81
7.4	Eine Charakterisierung pythagoreischer Tripel	83
7.5	Einige Identitäten und Ungleichungen für Winkelfunktionen	84
7.6	Aufgaben	85
8	Napoleonische Dreiecke	89
8.1	Der Satz von Napoleon	90
8.2	Das Dreiecksproblem von Fermat	91
8.3	Flächenbeziehungen zwischen Napoleonischen Dreiecken	93
8.4	Der Satz von Escher	96
8.5	Aufgaben	97
9	Bögen und Winkel	101
9.1	Winkel und Winkelmessung	102
9.2	Winkel in Kreisen	105
9.3	Die Potenz eines Punktes	107
9.4	Der Euler'sche Dreieckssatz	109
9.5	Der Taylor-Kreis	110
9.6	Die orthoptische Kurve einer Ellipse	111
9.7	Aufgaben	112
10	Vielecke mit Kreisen	115
10.1	Sehnenvierecke	116
10.2	Sangaku und der Satz von Carnot	119
10.3	Tangenten- und Sehnen-Tangentenvierecke	122
10.4	Der Satz von Fuß	123

10.5	Der Schmetterlingssatz	125
10.6	Aufgaben	126
11	Zwei Kreise	129
11.1	Der Augapfelsatz	130
11.2	Aus Kreisen abgeleitete Kegelschnitte	131
11.3	Gemeinsame Sehnen	133
11.4	Vesica Piscis – die Fischblase	135
11.5	Die Vesica Piscis und der Goldene Schnitt	136
11.6	Sicheln	137
11.7	Das Mondsichelrätsel	138
11.8	Das Problem von Mrs. Miniver	139
11.9	Konzentrische Kreise	140
11.10	Aufgaben	142
12	Venn-Diagramme	147
12.1	Sätze zu drei Kreisen	148
12.2	Dreiecke und sich schneidende Kreise	151
12.3	Reuleaux-Vielecke	153
12.4	Aufgaben	156
13	Überlappende Figuren	159
13.1	Der Teppich-Satz	160
13.2	Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$	161
13.3	Eine Charakterisierung von pythagoreischen Tripeln	162
13.4	Ungleichungen zwischen Mittelwerten	163
13.5	Die Tschebyschow-Ungleichung	164
13.6	Summen von dritten Potenzen	165
13.7	Aufgaben	165
14	Yin und Yang	169
14.1	Die große Monade	170
14.2	Kombinatorik mit Yin und Yang	172
14.3	Integration mithilfe der Symmetrie des Yin und Yang	174
14.4	Yin und Yang zur Unterhaltung	175
14.5	Aufgaben	177
15	Polygonzüge	179
15.1	Geraden und Strecken	180
15.2	Polygonalzahlen	182
15.3	Polygonzüge in der Integralrechnung	184
15.4	Konvexe Vielecke	185
15.5	Polygonale Zykloiden	188
15.6	Polygonale Kardioiden	192
15.7	Aufgaben	194

16	Sternpolygone	197
16.1	Die Geometrie von Sternpolygonen	198
16.2	Das Pentagramm	202
16.3	Der Davidstern	204
16.4	Der Lakshmi-Stern und das Oktagramm	207
16.5	Sternpolygone in der Unterhaltungsmathematik	210
16.6	Aufgaben	213
17	Selbstähnliche Figuren	217
17.1	Geometrische Reihen	218
17.2	Iteratives Wachstum von Figuren	220
17.3	Lässt sich Papier zwölfmal durch Falten halbieren?	222
17.4	Die <i>Spira Mirabilis</i>	223
17.5	Der Menger-Schwamm und der Sierpiński-Teppich	225
17.6	Aufgaben	226
18	Tatami	229
18.1	Der Satz des Pythagoras – Beweis von Bhāskara	230
18.2	Tatamimatten und Fibonacci-Zahlen	232
18.3	Tatamimatten und Darstellungen von Quadratzahlen	233
18.4	Tatami-Ungleichungen	235
18.5	Verallgemeinerte Tatamimatten	236
18.6	Aufgaben	237
19	Rechtwinklige Hyperbeln	241
19.1	Eine Kurve, viele Definitionen	243
19.2	Die rechtwinklige Hyperbel und ihre Tangenten	244
19.3	Ungleichungen für natürliche Logarithmen	245
19.4	Der Sinus und Kosinus Hyperbolicus	248
19.5	Die Reihe der Kehrwerte der Dreieckszahlen	249
19.6	Aufgaben	249
20	Parkettierung	251
20.1	Gittermultiplikation	252
20.2	Parkettierung als Beweisverfahren	253
20.3	Parkettierung eines Rechtecks mit Rechtecken	254
20.4	Der Satz des Pythagoras – unendlich viele Beweise	255
20.5	Aufgaben	257
21	Lösungen zu den Aufgaben	259
21.1	Kapitel 1	259
21.2	Kapitel 2	261
21.3	Kapitel 3	262
21.4	Kapitel 4	265
21.5	Kapitel 5	268
21.6	Kapitel 6	270

21.7	Kapitel 7	274
21.8	Kapitel 8	278
21.9	Kapitel 9	281
21.10	Kapitel 10	283
21.11	Kapitel 11	285
21.12	Kapitel 12	288
21.13	Kapitel 13	290
21.14	Kapitel 14	292
21.15	Kapitel 15	294
21.16	Kapitel 16	295
21.17	Kapitel 17	299
21.18	Kapitel 18	301
21.19	Kapitel 19	302
21.20	Kapitel 20	303
Literatur		307
Sachverzeichnis		313